

UOT: 03.65.Ge, 03.65.-w, 03.65.Fd, 02.30.Gp

**D - ÖLÇÜLÜ ŞREDİNGER TƏNLIYİNİN
VUD-SAKSON POTENSİALI SAHƏSİNDƏ HƏLLİ**

V.H.BƏDƏLOV

*Fizika Problemləri İnstitutu, Bakı Dövlət Universiteti
badalovvatan@yahoo.com*

İşdə Pekeris yaxınlaşmasının köməyilə Vud-Sakson potensialı sahəsində D - ölçülü radial Şredinger tənliyinin analitik həlləri araşdırılmışdır. İxtiyari l - hali üçün Asimptotik iterasiya metodundan istifadə etməklə enerjinin məxsusi qiymətləri və radial dalğa funksiyaları tapılmışdır. Belə ki, potensialın V_0 dərinliyindən, radial n_r və orbital l kvant ədədlərindən, D , a , R_0 parametrlərindən asılı məhdud sayda enerji spektri müəyyən edilmişdir.

Açar sözlər: Vud-Sakson potensialı, Asimptotik İterasiya metodu, Pekeris yaxınlaşması

Qeyri-relyativistik kvant mexanikasında Şredinger tənliyinin həlli kvant sisteminin tam təsvir olunması üçün bütün vacib informasiyanı özündə əks etdirir. İxtiyari n_r və l kvant ədədləri üçün radial Şredinger tənliyinin dəqiq həll olunması yalnız bir necə potenciallarda mümkündür. Radial Şredinger tənliyinin orbital kvant ədədinin $l \neq 0$ halında bu potenciallar çərçivəsində bir çox üsullar - Polinom usulu [1,2], Nikiforov –Uvarov (NU) metodu [3], Supersimmetrik Kvant Mexanikası (SYM) [4], Asimptotik İterasiya Metodu (AİM) [5-8] işlənmişdir.

Radial Şredinger tənliyi Vud-Sakson potensialı üçün orbital kvant ədədinin $l \neq 0$ qiymətində dəqiq həll oluna bilmir. Belə ki, S. Flugge $l = 0$ halında bu potensial sahədə radial Şredinger tənliyini analitik həll edərək dalğa funksiyası üçün dəqiq ifadə almış, lakin enerjinin məxsusi qiymətlərini qrafik üsulla müəyyən etmişdir [2]. Vud-Sakson potensialı [9] fizikada ən mühüm yaxına təsir potensialı olub, nüvə və hissəciklər fizikasında, atom fizikasında, materiallar və kimyəvi fizikada müxtəlif problemlərə tətbiq edilmişdir.

İlk dəfə Pekeris yaxınlaşmasında [10] NU metodunun köməyilə orbital kvant ədədinin $l \neq 0$ qiymətində Vud-Sakson potensialı sahəsində radial Şredinger və radial Kleyn-Gordon tənlikləri analitik həll olunmuş, enerjinin məxsusi qiymətləri və uyğun dalğa funksiyaları tapılmışdır [11-13]. Burada ixtiyari

l halında $V_l(r) = \frac{\hbar^2 \tilde{l}(\tilde{l} + 1)}{2\mu r^2}$ mərkəzəqaçma potensialı üçün aşağıdakı approksimasiya sxemi – Pekeris yaxınlaşması təklif edilmişdir:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R_0^2} \left(C_0 + \frac{C_1}{1 + e^{-\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{C_2}{\left(1 + e^{-\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \right). \quad (1.1)$$

R_0, a potensial parametrlərindən asılı olan C_0, C_1, C_2 kəmiyyətləri (1.1) münasibətinin hər iki tərəfini nüvənin səthi yaxınlığında - $r = R_0$ nöqtəsi ətrafında Taylor sırasına ayırmaqla müqayisədən təyin olunan parametrlərdir. D - ölçülü radial Şredinger tənliyi Vud-Sakson potensialı üçün ixtiyari l halında mərkəzəqaçma potensialına bu yaxınlaşmanı tətbiq etməklə Nikiforov-Uvarov, Asimptotik iterasiya və Supersimmetrik kvant mexanikası metodlarının köməyiylə həll olunmuş, enerjisinin məxsusi qiymətləri və uyğun məxsusi funksiyaları tapılmışdır [14].

İşdə Vud-Sakson potensialı üçün D - ölçülü radial Şredinger tənliyi analitik həll edilmiş, radial n_r və orbital l kvant ədədlərindən asılı enerji spektri və uyğun dalğa funksiyaları tapılmışdır. Hesablamalar ixtiyari l halında effektiv $V_{eff}(r)$ potensialın $r = r_{\min}$ minimum nöqtəsi ətrafında müəyyən olunan C_0, C_1, C_2 approksimasiya parametrləri əsasında $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialına Pekeris yaxınlaşmasını tətbiq etməklə Asimptotik iterasiya metodunun köməyiylə aparılmışdır.

D - ölçülü Şredinger tənliyi

D - ölçülü ($D \geq 2$) polyar $r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-2}, \phi$ koordinatlarda R^D -də Laplas operatoru aşağıdakı kimidir [15]:

$$\nabla_D^2 = r^{1-D} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{A_D^2}{r^2} \quad (2.1)$$

burada r - hiperradius, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-2}, \phi$ - hiperbucaqlar, A_D^2 vahid S^{D-1} sferasında 3-ölçülü bucaq momenti operatoruna analoji təyin olunan xüsusi törəmli diferensial (Laplas-Beltrami operatoru və ya böyük orbital operator və ya hiperbucaq momenti operatoru, Avery [15]) operatorudur.

Sferik simmetrik $V(r)$ potensial sahədə D -ölçülü Şredinger tənliyi [15]

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_D^2 + V(r) - E_{nl} \right) \psi_{nlm}(r, \Omega_D) = 0, \quad (2.2)$$

burada μ - sistemin gətirilmiş kütləsi, \hbar - isə Plank sabitidir və

$$\psi_{nlm}(r, \Omega_D) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\Omega_D). \quad (2.3)$$

Laplas operatoru hiper-radial $r^{1-D} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right)$ və bucaq $\frac{A_D^2}{r^2} = -\frac{\hat{L}_D^2}{\hbar^2 r^2}$ hissələrinə ayrılır, yəni

$$\nabla_D^2 = r^{1-D} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}_D^2}{\hbar^2 r^2}, \quad (2.4)$$

burada \hat{L}_D böyük orbital bucaq momenti operatorudur. \hat{L}_D^2 -in məxsusi funksiyası $Y_{lm}(\Omega_D)$ hiper-sferik harmonik funksiyadır:

$$\hat{L}_D^2 Y_{lm}(\Omega_D) = \hbar^2 l(l+D-2) Y_{lm}(\Omega_D), \quad (2.5)$$

burada l - orbital kvant ədədidir.

(2.3), (2.4) və (2.5) ifadələrini (2.2) tənliyində yerinə yazıb və $\psi_{nlm}(r, \Omega_D)$ funksiyasının $\hbar^2 l(l+D-2)$ məxsusi qiymətli \hat{L}_D^2 operatorunun məxsusi funksiyası olması faktından istifadə etsək, sferik simmetrik $V(r)$ potensial sahədə hiper-radial Şredinger tənliyi

$$\frac{d^2 R_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{dR_{nl}(r)}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E_{nl} - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+D-2)}{2\mu r^2} \right] R_{nl}(r) = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (2.6)$$

olar. Yeni $u_{nl}(r) = r^{\frac{D-1}{2}} R_{nl}(r)$ funksiyası üçün (2.6) tənliyi

$$\frac{d^2 u_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E_{nl} - V(r) - \frac{\hbar^2 \left(l + \frac{D-1}{2} \right) \left(l + \frac{D-3}{2} \right)}{2\mu r^2} \right] u_{nl}(r) = 0 \quad (2.7)$$

olur. (2.7) tənliyində $\tilde{l} = l + \frac{D-3}{2}$ işarələməsini qəbul etsək, alarıq:

$$\frac{d^2 u_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E_{nl} - V_{eff}(r)] u_{nl}(r) = 0, \quad (2.8)$$

burada $V_{eff}(r)$ - effektiv potensialdır və

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 \tilde{l}(\tilde{l}+1)}{2\mu r^2} \quad (2.9)$$

kimi təyin olunur. (2.8) tənliyi iki mühüm halı çıxmaqla bir ölçülü hissəcik üçün yazılmış tənliklə eyni formadadır. Bunlardan birincisi, $\hbar^2 \tilde{l}(\tilde{l}+1)$ məxsusi qiymətlərinə uyğun olan effektiv potensialın mövcudluğu; ikincisi, radial dalğa funksiyasının $u(0) = 0$ və $u(\infty) = 0$ sərhəd şərtlərinin ödənməsidir.

Sferik simmetrik standart Vud-Sakson potensialı [9]

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{-\frac{r-R_0}{a}}} \quad (a \ll R_0), \quad (2.10)$$

şəklindədir, burada V_0 - potensial çuxurun dərinliyi, R_0 - potensialın eni və ya nüvənin radiusu, a - parametri isə nüvənin səth təbəqəsinin qalınlığı və o, ionlaşma enerjisinin təcrübi qiyməti ilə müəyyən olunur. $a = 0$ olduqda nüvə səthində potensialın sıçraması ilə o sadə potensial çuxura çevrilir.

(2.9) və (2.10) ifadələrindən görünür ki, effektiv potensial eksponensial və orbital mərkəzəqaçma potensiallarının cəmidir. Radial Şredinger tənliyini bu potensial üçün $\tilde{l} \neq 0$ qiymətində supersimmetrik kvant mexanikası, asimptotik iterasiya və NU üsullarından istifadə etməklə dəqiq həll etmək mümkün deyil, buna səbəb olan effektiv $V_{eff}(r)$ potensialın ifadəsindəki orbital mərkəzəqaçma $V_l(r)$ potensialıdır. Ona görə də bu problemi həll etmək üçün Pekeris yaxınlaşmasından istifadə edək. Bu yaxınlaşma mərkəzəqaçma potensial çəpərin nüvələr arası r məsafəsindən asılı olub, eksponensiallara görə sıraya ayrılmaya əsaslanır ki, burada ikinci tərtibə qədər hədlər nəzərə alınır. Yeni adsız $x = \frac{r - R_0}{R_0}$ dəyişənini daxil edib ($r = R_0(1 + x)$) və orbital $V_l(r)$ mərkəzəqaçma

potensialını effektiv $V_{eff}(r)$ potensialının ekstremum nöqtəsi, yəni

$$\frac{\alpha V_0 e^{\alpha x}}{(1 + e^{\alpha x})^2} = \frac{\hbar^2 \tilde{l}(\tilde{l} + 1)}{2\mu R_0^2} \cdot \frac{2}{(1 + x)^3} \quad (2.11)$$

transendent tənliyini ödəyən $x = x_{\min}$ ($r = r_{\min}$) minimum nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayırıq:

$$V_l(r) = \frac{\hbar^2 \tilde{l}(\tilde{l} + 1)}{2\mu r^2} = \tilde{\delta} \left[\frac{1}{(1 + x_l)^2} - \frac{2}{(1 + x_l)^3} \cdot (x - x_l) + \frac{3}{(1 + x_l)^3} \cdot (x - x_l)^2 + o((x - x_l)^3) \right], \quad (2.12)$$

burada $\tilde{\delta} = \frac{\hbar^2 \tilde{l}(\tilde{l} + 1)}{2\mu R_0^2}$ və (2.11) tənliyinin həlli l orbital kvant ədədindən asılı

olduğu üçün $x_{\min} = x_l$ - dir. Pekeris approksimasiyasına görə orbital $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialı aşağıdakı kimi götürülür [11-13]:

$$\tilde{V}_l(x) = \tilde{\delta} \left(C_0 + \frac{C_1}{1 + e^{\alpha x}} + \frac{C_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right), \quad (2.13)$$

burada $\alpha = R_0/a$ -dir. $\tilde{V}_l(r)$ potensialını $x = x_{\min} = x_l$ ($r = r_{\min} = r_l$) minimum nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayırıq:

$$\tilde{V}_l(x) = \tilde{\delta} \left[C_0 + \frac{C_1}{1 + e^{\alpha x_l}} + \frac{C_2}{(1 + e^{\alpha x_l})^2} - \left(\frac{\alpha C_1 e^{\alpha x_l}}{(1 + e^{\alpha x_l})^2} + \frac{2\alpha C_2 e^{\alpha x_l}}{(1 + e^{\alpha x_l})^3} \right) (x - x_l) + \right. \\ \left. - \left(\frac{\alpha^2 C_1 e^{\alpha x_l} (1 - e^{\alpha x_l})}{2(1 + e^{\alpha x_l})^3} + \frac{\alpha^2 C_2 e^{\alpha x_l} (1 - 2e^{\alpha x_l})}{(1 + e^{\alpha x_l})^4} \right) (x - x_l)^2 + o((x - x_l)^3) \right]. \quad (2.14)$$

(2.12) və (2.14) ifadələrində x - in eyni tərtibli uyğun dərəcələrinin müqayisəsindən C_0 , C_1 , C_2 sabitlərinin təyini üçün alınan cəbri tənliklər sisteminin həlli

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{(1+x_l)^2} + \frac{(1+e^{\alpha x_l})^2}{\alpha e^{\alpha x_l} (1+x_l)^3} \left[\frac{e^{-\alpha x_l} - 3}{1+e^{\alpha x_l}} + \frac{3e^{-\alpha x_l}}{\alpha(1+x_l)} \right] \\ C_1 = \frac{2(1+e^{\alpha x_l})^2}{\alpha e^{\alpha x_l} (1+x_l)^3} \left[2 - e^{-\alpha x_l} - \frac{3(1+e^{-\alpha x_l})}{\alpha(1+x_l)} \right] \\ C_2 = \frac{(1+e^{\alpha x_l})^3}{\alpha e^{\alpha x_l} (1+x_l)^3} \left[e^{-\alpha x_l} - 1 + \frac{3(1+e^{-\alpha x_l})}{\alpha(1+x_l)} \right] \end{cases} \quad (2.15)$$

olar. Beləliklə, yeni effektiv potensial üçün alırıq:

$$\tilde{V}_{eff}(r) = V_{ws}(r) + \tilde{V}_l(r) = K_0 - \frac{K_1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{K_2}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2}, \quad (2.16)$$

burada $K_0 = \tilde{\delta}C_0$, $K_1 = V_0 - \tilde{\delta}C_1$, $K_2 = \tilde{\delta}C_2$ -dir. Qeyd edək ki, (2.15) münasibətlərində $x_l = 0$ nəzərə alsaq, $C_0 = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2}$, $C_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2}$, $C_2 = \frac{48}{\alpha^2}$ olar [11-13].

D -ölçülü radial Şredinger tənliyinin (2.9) münasibətilə verilmiş effektiv $V_{eff}(r)$ Vud-Sakson potensialı üçün həll etmək əvəzinə Pekeris yaxınlaşmasından alınmış (2.17) münasibətilə təyin olunan $\tilde{V}_{eff}(r)$ effektiv potensialı üçün yeni radial Şredinger tənliyini həll edək. Beləliklə, Pekeris approksimasiyasına əsasən (2.8) tənliyində $V_{eff}(r)$ -nin yerinə $\tilde{V}_{eff}(r)$ yazsaq, alırıq:

$$\frac{d^2 u_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E_{nl} - K_0 + \frac{K_1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{K_2}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \right] u_{nl}(r) = 0. \quad (2.17)$$

(2.17) tənliyində yeni $z = \left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^{-1}$ dəyişəninə keçsək, alırıq:

$$u''(z) + \frac{1-2z}{z(1-z)} u'(z) + \frac{-\varepsilon^2 + \beta^2 z - \gamma^2 z^2}{(z(1-z))^2} u(z) = 0, \quad (0 \leq z \leq 1). \quad (2.18)$$

Burada ε , β və γ ölçüsüz parametrlərdir və aşağıdakı kimi təyin olunurlar:

$$\varepsilon^2 = -\frac{2\mu a^2 (E - K_0)}{\hbar^2} > 0, \quad \beta^2 = \frac{2\mu a^2 K_1}{\hbar^2} > 0, \quad \gamma^2 = \frac{2\mu a^2 K_2}{\hbar^2} > 0. \quad (2.19)$$

D - Ölçülü radial Şredinger tənliyinin asimptotik iterasiya metodu ilə həlli

(2.18) tənliyinə asimptotik iterasiya metodunu tətbiq edərək dalğa funksiyasını aşağıdakı kimi axtaraq:

$$u(z) = z^\zeta (1-z)^\eta \chi(z) \quad (3.1)$$

Qeyd edək ki, radial $u(z)$ dalğa funksiyasının sonlu olması $u(0) = u(1) = 0$ şərtindən $\zeta > 0, \eta > 0$ alınır. (3.1) ifadəsini (2.18) tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$\chi''(z) + \frac{2\zeta + 1 - 2(\zeta + \eta + 1)z}{z(1-z)} \chi'(z) + \frac{\zeta^2 - \varepsilon^2 + [\beta^2 - (2\zeta + 1)(\zeta + \eta)]z + [(\zeta + \eta)^2 + \zeta + \eta - \gamma^2]z^2}{z^2(1-z)^2} \chi(z) = 0.$$

ζ və η parametrlərini elə seçək ki, yuxarıdakı tənlik sadələşsin. Ona görə də ζ və η parametrlərini

$$\begin{cases} \zeta^2 - \varepsilon^2 = 0 \\ \beta^2 - (2\zeta + 1)(\zeta + \eta) = -[(\zeta + \eta)^2 + \zeta + \eta - \gamma^2] \end{cases} \quad (3.2)$$

şəklində götürsək, $\zeta > 0, \eta > 0$ şərtində $\zeta = \varepsilon > 0, \eta = \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} > 0$ olar. (3.2) ifadələrini yuxarıdakı diferensial tənlikdə yerinə yazsaq, alarıq:

$$\chi''(z) + \frac{2\varepsilon + 1 - 2(\varepsilon + \eta + 1)z}{z(1-z)} \chi'(z) - \frac{(\varepsilon + \eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2}{z(1-z)} \chi(z) = 0. \quad (3.3)$$

İkinci tərtib xətti bircins [5-8]

$$y''(x) = \lambda_0(x)y'(x) + s_0(x)y(x) \quad (3.4)$$

adi diferensial tənliklə (3.3) tənliyini müqayisə etsək, $\lambda_0(z)$ və $s_0(z)$ funksiyaları üçün alarıq:

$$\lambda_0(z) = \frac{2(\varepsilon + \eta + 1)z - 2\varepsilon - 1}{z(1-z)}, \quad s_0(z) = \frac{(\varepsilon + \eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2}{z(1-z)}. \quad (3.5)$$

(3.5) münasibətləri ilə verilən funksiyalardan istifadə edərək rekurrent [5-8]

$$\begin{aligned} \lambda_k(x) &= \lambda'_{k-1}(x) + s_{k-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{k-1}(x) \\ s_k(x) &= s'_{k-1}(x) + s_0(x)\lambda_{k-1}(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

düsturlarına əsasən $\lambda_1(z), \lambda_2(z), s_1(z), s_2(z)$ funksiyaları üçün tapırıq:

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= \lambda'_0(z) + s_0(z) + \lambda_0^2(z) = z^{-2}(1-z)^{-2} \left\{ 2(\varepsilon + 1)(2\varepsilon + 1) + [(\varepsilon + \eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2 - \right. \\ &\quad \left. 2(2\varepsilon + 1)(2\varepsilon + 2\eta + 3)]z + [3(\varepsilon + \eta)^2 + 9(\varepsilon + \eta) + \gamma^2 + 6]z^2 \right\}, \\ s_1(z) &= s'_0(z) + s_0(z)\lambda_0(z) = \frac{2[(\varepsilon + \eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2][(\varepsilon + \eta + 2)z - (\varepsilon + 1)]}{z^2(1-z)^2}, \end{aligned}$$

$$\lambda_2(z) = \lambda'_1(z) + s_1(z) + \lambda_0(z)\lambda_1(z) = z^{-3}(1-z)^{-3} \left\{ -2(\varepsilon + 1)(2\varepsilon + 1)(2\varepsilon + 3) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[-4(\varepsilon+1)(\varepsilon+\eta)^2 + 8(\varepsilon+1)(3\varepsilon+1)(\varepsilon+\eta) + 4(\varepsilon+1)\gamma^2 + 24(\varepsilon+1)(2\varepsilon+1) \right] z \\
& + \left[4(\varepsilon+\eta)^3 - (20\varepsilon-4)(\varepsilon+\eta)^2 - 2(40\varepsilon+2\gamma^2+15)(\varepsilon+\eta) - 4(\varepsilon+3)\gamma^2 - \right. \\
& \left. - 36(2\varepsilon+1) \right] z^2 + \left[4(\varepsilon+\eta)^3 + 24(\varepsilon+\eta)^2 + 4(\gamma^2+11)(\varepsilon+\eta) + 8(\gamma^2+3) \right] z^3 \Big\}, \\
s_2(z) = s_1'(z) + s_0(z)\lambda_1(z) = z^{-3}(1-z)^{-3} & [(\varepsilon+\eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2] \{ 2(\varepsilon+1)(2\varepsilon+3) + \\
& [(\varepsilon+\eta)^2 - (\varepsilon+\eta) - \gamma^2 - 4(2\varepsilon+3) - 2(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+2\eta+3)] z + \\
& [3(\varepsilon+\eta)^2 + 15(\varepsilon+\eta) + \gamma^2 + 18] z^2 \Big\}.
\end{aligned}$$

Bu funksiyaları kvantlanma şərtlərində [5-8]

$$\delta_k(x) = \begin{vmatrix} \lambda_k(x) & s_k(x) \\ \lambda_{k-1}(x) & s_{k-1}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

yerinə yazsaq, alarıq:

$$\begin{aligned}
\delta_1(z) = \lambda_1(z)s_0(z) - \lambda_0(z)s_1(z) &= \frac{[(\varepsilon+\eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2][(\varepsilon+\eta+1)^2 + \varepsilon + \eta + 1 - \gamma^2]}{z^2(1-z)^2}, \\
\delta_2(z) = \lambda_2(z)s_1(z) - \lambda_1(z)s_2(z) &= \\
&= \frac{[(\varepsilon+\eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2][(\varepsilon+\eta+1)^2 + \varepsilon + \eta + 1 - \gamma^2][(\varepsilon+\eta+2)^2 + \varepsilon + \eta + 2 - \gamma^2]}{z^3(1-z)^3}, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

.....

$$\delta_k(z) = \lambda_k(z)s_{k-1}(z) - \lambda_{k-1}(z)s_k(z) = \frac{(-1)^{k+1} \prod_{i=0}^k [(\varepsilon+\eta+i)^2 + \varepsilon + \eta + i - \gamma^2]}{z^{k+1}(1-z)^{k+1}}.$$

(3.8) münasibətlərindən

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 + \eta_0 &= \frac{\sqrt{1+4\gamma^2} - 1}{2} \\
\varepsilon_1 + \eta_1 &= \frac{\sqrt{1+4\gamma^2} - 3}{2} \\
&\dots\dots\dots \\
\varepsilon_k + \eta_k &= \frac{\sqrt{1+4\gamma^2} - 2k - 1}{2} \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \quad (3.9)$$

və $\eta = \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}$ olduğundan ümumi halda alarıq:

$$\varepsilon_n + \sqrt{\varepsilon_n^2 - \beta^2 + \gamma^2} = n', \quad (3.10)$$

burada

$$n' = -n_r + \frac{\sqrt{1+4\gamma^2} - 1}{2} \quad (3.11)$$

və n_r radial kvant ədədidir ($n_r = 0, 1, 2, \dots$). Beləliklə, (3.10) münasibətindən enerji spektri üçün tapırıq:

$$\varepsilon_{n_r} = \frac{1}{2} \left(n' + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{n'} \right). \quad (3.12)$$

Əlaqəli halların mümkün olması $-V_0 < E < 0$ və dalğa funksiyasının sonlu olması $\zeta = \varepsilon > 0$, $\eta = \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} > 0$ şərtlərinə əsasən (3.11) və (3.12) ifadələrindən $n' > 0$ və $\beta^2 - \gamma^2 > -n'^2$ alınır. (2.11) və (3.11) münasibətlərinə əsasən bu bərabərsizliklər aşağıdakı kimi olar:

$$0 \leq n_r < \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 K_2}{\hbar^2}} - 1 \right), \quad (3.13)$$

$$V_0 R_0^3 \geq \frac{4\hbar^2 \tilde{l} (\tilde{l} + 1) a}{\mu}. \quad (3.14)$$

$\varepsilon, \beta, \gamma$ parametrlərinin (2.19) ifadələrini (3.12)-də yerinə yazsaq, ixtiyari l - halında enerjinin məxsusi qiyməti üçün alırıq:

$$E_{n_r, l} = K_0 - \frac{K_1 - K_2}{2} - \frac{\hbar^2}{32\mu a^2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 K_2}{\hbar^2}} - 2n_r - 1 \right)^2 - \frac{\frac{2\mu a^2}{\hbar^2} (K_1 - K_2)^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 K_2}{\hbar^2}} - 2n_r - 1 \right)^2}. \quad (3.15)$$

İkinci tərtib xətti bircins adi diferensial (3.3) tənliyinin həlli [5-8]:

$$\chi_{n_r, l}(z) = (-1)^{n_r} C \frac{\Gamma(2\varepsilon + n_r + 1)}{\Gamma(2\varepsilon + 1)} {}_2F_1(-n_r, 2\varepsilon + 2\eta + 1 + n_r; 2\varepsilon + 1; z), \quad (3.16)$$

burada ${}_2F_1(-n_r, 2\varepsilon + 2\eta + 1 + n_r; 2\varepsilon + 1; z)$ - Qausun hiperhəndəsi funksiya-sıdır və C müəyyən sabitdir.

$D=3$ olduqda, $l=0$ halında sistemin əlaqəli halları yoxdur. Çünki bu halda (3.13) bərabərsizliyi ödənmir, yəni $n_r < 0$ olur. Bu, o deməkdir ki, impuls momentinin sıfır qiymətində standart Vud - Sakson potensialı üçün Şredinger tənliyinin əlaqəli halları olmur. $D > 3$ olduqda, $l=0$ halında sistemin əlaqəli halları vardır. (3.15) ifadəsinə əsasən enerjinin məxsusi qiyməti potensialın V_0 dərinliyindən, potensialın R_0 enindən, səthin a qalınlığından və D parametridən asılıdır. Beləliklə, n_r, V_0 və E üçün müəyyən olunmuş şərtlər, yəni (3.13), (3.14) və $-V_0 < E < 0$ bərabərsizlikləri ödənərsə, onda əlaqəli hallar mövcuddur və bu halların enerji spektri məhdud saydadır.

Hesablamların nəticəsi və müzakirəsi

Perey və başqaları [16] tərəfindən tapılmış təcrübi nəticələrə $r_0 = 1.285 \text{ fm}$, $a = 0.65 \text{ fm}$ əsasən Vud-Sakson potensialının dərinliyi V_0 parametri $V_0 = (40.5 + 0.13A) \text{ MeV} = 47.78 \text{ MeV}$ və hədəf ^{56}Fe nüvəsinin radiusu $R_0 = r_0 A^{\frac{1}{3}} = 4.9162 \text{ fm}$ kimi hesablanır, burada A nüvənin atom kütlə ədədidir. ^{56}Fe atom nüvəsindən $m_A = 56 u$ və neytrondən $m_n = 1.00866 u$ ibarət sistemin gətirilmiş kütləsi $\mu = \frac{m_A \cdot m_n}{m_A + m_n} = 0.990814 u$ olar. Cədvəl 1-də n_r və l -in müəyyən qiymətlərində $V_0 = 47.78 \text{ MeV}$, $R_0 = 4.9162 \text{ fm}$, $a = 0.65 \text{ fm}$, $D = 3$ olduqda effektiv Vud-Sakson potensialın minimum x_l nöqtəsi, onun $V_{\text{eff}, \text{min}}$ minimum qiyməti, əlaqəli hallarının enerjisi və ona uyğun normalaşmış dalğa funksiyaları verilmişdir.

Cədvəl 1

| n_r | l | r_l , fm | $V_{\text{eff}, \text{min}}$, MeV | $E_{n_r, l}$, MeV | $u_{n_r, l}(z)$ |
|-------|-----|-------------|------------------------------------|--------------------|---|
| 0 | 1 | 2,955784989 | -40,7112185 | -42,8980494 | $7,4191626z^{3,9133572}(1-z)^{0,2835208}$ |
| 0 | 2 | 3,439674903 | -32,5967173 | -30,9674480 | $4,6308483z^{2,5214495}(1-z)^{0,1881863}$ |
| 0 | 3 | 3,785995369 | -22,9486053 | -18,3133413 | $3,2487779z^{1,7924708}(1-z)^{0,0969816}$ |
| 0 | 4 | 4,078884273 | -12,0509224 | -5,1619817 | $2,3664513z^{1,2936974}(1-z)^{0,0036757}$ |
| 0 | 5 | 4,355621020 | -0,1838031 | 8,0319079 | $2,4033256z^{0,8956199}(1-z)^{0,0891017}$ |
| 0 | 6 | 4,651527826 | 12,3288532 | 20,4448044 | $2,2843614z^{0,5317537}(1-z)^{0,1866466}$ |
| 0 | 7 | 5,075017347 | 24,9566429 | 20,7958875 | $2,8356057z^{0,4259909}(1-z)^{0,4933509}$ |

$1 \leq l \leq 4$ və $n_r = 0$ olduqda sistemin əlaqəli halları vardır. Lakin $1 \leq l \leq 4$, $1 \leq n_r \leq 3$ və $5 \leq l \leq 7$, $n_r = 0$ üçün enerjinin $E_{n_r, l}$ məxsusi qiymətləri $-V_0 < E < 0$ bərabərsizliyini ödəmir, yəni bu nəticələr heç bir fiziki hesab edilə bilməz və o yalnız riyazi nəticədir. Beləliklə, orbital $l \geq 5$ kvant ədədinin bu qiymətlərində heç bir əlaqəli hal yoxdur. Qeyd edək ki, $l \geq 8$ olduqda transendent (2.11) tənliyinin həlli yoxdur. Cədvəl 1 -dən görünür ki, orbital l kvant ədədi artdıqca r_l -in qiyməti R_0 -a yaxınlaşır və $l = 7$ olduqda onun qiyməti nüvənin R_0 radiusundan böyük olur. $5 \leq l \leq 7$ qiymətlərində əlaqəli halların olmamasının səbəbi orbital mərkəzəqaçma potensialının nüvənin radiusu ətrafında sıraya ayrılması ola bilər. Nüvənin səthi yaxınlığında əlaqəli halların olmaması faktı [11-13] işlərində alınan nəticələrlə də təsdiq olunur.

n_r və l -in müəyyən qiymətlərində $V_0 = 47.78 \text{ MeV}$, $R_0 = 4.9162 \text{ fm}$, $a = 0.65 \text{ fm}$, $D = 4$ olduqda effektiv Vud-Sakson potensialın minimum x_l nöqtəsi, onun $V_{\text{eff}, \text{min}}$ minimum qiyməti, əlaqəli hallarının enerjisi və ona uyğun normalaşmış dalğa funksiyaları cədvəl 2-də verilmişdir. Cədvəl 2-dən görünür

ki, $n_r = 0$ və $1 \leq l \leq 3$ qiymətlərində sistemin əlaqəli halları vardır. Belə ki, $0 \leq n_r \leq 5$ qiymətlərində $l = 0$ və $4 \leq l \leq 6$, həm də $n_r = 1, n_r = 2$ olduqda $1 \leq l \leq 3$ halları üçün (3.13) və (3.14) bərabərsizlikləri ödənilir, amma enerjinin məxsusi qiymətləri isə $-V_0 < E < 0$ bərabərsizliyini ödəmir. Bu o deməkdir ki, bu qiymətlərdə sistemin əlaqəli halları yoxdur. Qeyd edək ki, $l \geq 7$ olduqda transendent (2.11) tənliyinin həlli yoxdur.

Cədvəl 2

| n_r | l | r_l , fm | $V_{eff, min}$, MeV | $E_{n_r, l}$, MeV | $u_{n_r, l}(z)$ |
|-------|-----|-------------|----------------------|--------------------|---|
| 0 | 1 | 3,225130086 | -36,8636684 | -37.0225964 | $5,7227883z^{3,0742009}(1-z)^{0,2347859}$ |
| 0 | 2 | 3,622750840 | -27,9462688 | -24,7231461 | $3,8479532z^{2,1142654}(1-z)^{0,1424715}$ |
| 0 | 3 | 3,936412368 | -17,6387068 | -11,7764513 | $2,7692565z^{1,5250073}(1-z)^{0,0512704}$ |
| 0 | 4 | 4,217357729 | -6,2202093 | 1,4678162 | $2,3829922z^{1,0867462}(1-z)^{0,0413494}$ |
| 0 | 5 | 4,498131675 | 6,0162908 | 14,4169618 | $3,6053993z^{0,7131561}(1-z)^{0,5085916}$ |
| 0 | 6 | 4,829045858 | 18,6834392 | 25,7723352 | $1,8554540z^{0,3396916}(1-z)^{0,1153904}$ |

Cədvəl 1 və cədvəl 2-dən görünür ki, n_r və l - in qeyd edilmiş eyni qiymətlərində D artdıqca əlaqəli halların enerjisinin qiyməti artır, yəni $E_{01}^{(4)} > E_{01}^{(3)}$, $E_{02}^{(4)} > E_{02}^{(3)}$, $E_{03}^{(4)} > E_{03}^{(3)}$. Bu o deməkdir ki, $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialı hesabına sistemdə əlavə olaraq itələmə qüvvəsi meydana çıxır. Ona görə də bu potensialı kompensasiya etmək üçün əlaqəli halın enerjisi artmalıdır [1, 17].

Qeyd edək ki, $D=3$ və $D=4$ olduqda $n_r=0, l=0$ qiymətləri üçün sistemin əlaqəli halları yoxdur. Lakin $D=5$ olduqda $n_r=0, l=0$ qiymətində sistemin əlaqəli halı var və onun enerjisi $E_{00}^{(5)} = -42,8980454$ Mev-ə bərabərdir. Deməli, $D=3$ və $D=4$ olduqda $n_r=0, l=0$ qiymətində sistemin əlaqəli hallarının olmaması standart Vud-Sakson potensialının sistemi tam təsvir edə bilməməsi ilə bağlıdır. Bundan çıxış yolu kimi ya standart Vud-Sakson potensialının modifikasiya olunmuş formasından (məsələn, ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı), ya da standart Vud-Sakson potensialında spin və pseudospin simmetriyasından istifadə etməklə ola bilər.

Nəticə

Vud-Sakson potensialı sahəsində ixtiyari l üçün mərkəzəqaçma potensialına təkmilləşmiş yaxınlaşma sxemini tətbiq etməklə D -ölçülü Şredinger tənliyinin əlaqəli hallarının enerjisinin məxsusi qiymətləri və uyğun məxsusi funksiyaların analitik ifadələri tapılmışdır. Standart Vud-Sakson potensialı üçün enerjinin məxsusi qiyməti V_0, R_0, a , və D parametrlərindən asılı olub məhdud enerji səviyyələrinə malikdir, yəni kvant mexanikası çərçivəsində əlaqəli halların həlli zamanı potensial parametrlərin üzərinə bir sıra məhdud-

diyyətlər qoyulur. Belə ki, radial n_r kvant ədədi, potensialın V_0 dərinliyi və enerjinin E məxsusi qiymətləri uyğun olaraq (3.13), (3.14) və $-V_0 < E < 0$ bərabərsizlikləri ödəyirsə, əlaqəli hallar vardır. Müxtəlif potensial sahələr üçün enerji spektri praktiki maraq kəsb etdiyindən ixtiyari parametərə nəzərən enerjinin məxsusi qiymətlərinin xassələrinin öyrənilməsi çox vacib və aktualdır. Bu məqsədlə l və n_r - nin müəyyən qiymətləri üçün ^{56}Fe nüvəsinin əlaqəli halların enerjisinin qiymətləri hesablanmış və onların təhlili aparılmışdır.

ƏDƏBİYYAT

1. Greiner W. Quantum Mechanics. Berlin: Springer, 2001, 509 p.
2. Flügge S. Practical Quantum Mechanics. Berlin: Springer, 1994, 641 p.
3. Nikiforov A.F. and Uvarov V.B. Special Functions of Mathematical Physics. Basel: Birkhäuser, 1988, 445 p.
4. Cooper F., Khare A. and Sukhatme U. Supersymmetry and Quantum Mechanics // Phys. Rep. 1995, 251, p. 267-385.
5. Çiftçi H., Hall R.L. and Saad N. Asymptotic Iteration Method for Eigenvalue Problems // J. of Phys. A: Math.Gen., 2003, 36, p. 11807-11816.
6. Çiftçi H., Hall R.L. and Saad N. Construction of Exact Solutions to Eigenvalue Problems by the Asymptotic Iteration Method // J. of Phys. A: Math.Gen. 2005, 38, p. 1147-1155.
7. Çiftçi H., Hall R.L. and Saad N. Perturbation Theory in a Framework of Iteration Methods // Phys. Lett. A: 2005, 340 p. 388-396.
8. Çiftçi H., Ozer O. and Roy P. Asymptotic Iteration Approach to Supersymmetric Bistable Potentials // Chin. Phys. B, 2012, Vol. 21, No. 1, p. 010303 /1-6.
9. Woods R.D. and Saxon D.S. Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering // Phys. Rev. 1954, 95, p. 577-578.
10. Pekeris C.L. The Rotation-Vibration Coupling in Diatomic Molecules // Phys. Rev. 1934, 45, p. 98-103.
11. Badalov V.H., Ahmadov H.I. and Badalov S.V. Analytical Solutions of the Klein –Gordon Equation with the Woods-Saxon Potential for Arbitrary l -State // News of Baku University, 2008, N 2, p. 157-165.
12. Badalov V.H., Ahmadov H.I. and Ahmadov A.I. Analytical Solutions of the Schrödinger Equation with the Woods-Saxon Potentials for Arbitrary l -state // Int.J.Mod.Phys. E 2009, Vol. 18, No. 3, p. 631-641.
13. Badalov V.H., Ahmadov H.I. and Badalov S.V. Any l -State Analytical Solutions of the Klein – Gordon Equation for the Woods-Saxon Potential // Int.J.Mod.Phys. E, 2010, Vol. 19, No. 7, p. 1463-1475.
14. Bədəlov V.H. Vud-Sakson potensialı üçün D -ölçülü Şredinger tənliyinin əlaqəli halları // Journal of Qafqaz University, 2014, Vol.2, No. 2, p.178-191.
15. Avery J. Hyperspherical Harmonics. Applications in Quantum Theory. Dordrecht: Kluwer, 1989, 255 p.
16. Perey C.M., Perey F.G., Dickens J.K. and Silva R.J. 11-MeV Proton Optical-Model Analysis // Phys. Rev. 1968, 175, p.1460-1475.
17. Ballentine L.E. Quantum Mechanics. Singapore: World Scientific, 1998, 643 p.

РЕШЕНИЯ D - МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ ВУДСА-САКСОНА

В.Г.БАДАЛОВ

РЕЗЮМЕ

В работе были изучены аналитические решения D - мерного радиального уравнения Шредингера в потенциальном поле Вудса-Саксона с помощью аппроксимации Пекериса. С использованием метода Асимптотической итерации были найдены собственные значения энергии и волновой функции для произвольного l состояния. Так, были определены конечные числа энергетического спектра в зависимости от глубины потенциала V_0 , радиального n_r и орбитального l квантовых чисел и параметров D, a, R_0 .

Ключевые слова: потенциал Вудса-Саксона, метод Асимптотической Итерации, аппроксимация Пекериса

SOLUTIONS OF THE D -DIMENSIONAL SCHRÖDINGER EQUATION FOR THE WOODS-SAXON POTENTIAL

V.H.BADALOV

SUMMARY

In this paper, the analytical solutions of the D - dimensional radial Schrödinger equation have been studied for the Wood-Saxon potential by using the Pekeris approximation. The energy eigenvalues and radial wavefunctions were found for any l - state via the Asymptotic Iteration Method. Thus, a finite number energy spectrum depending on the depth of the potential V_0 , the radial n_r and l orbital quantum numbers and parameters D, a, R_0 were identified as well.

Key words: Analytical solutions, Asymptotic Iteration Method; Pekeris approximation

Redaksiyaya daxil oldu: 04.12.2015-ci il

Çapa imzalandı: 12.02.2016-ci il